Cevap Anahtarı

Adı Soyadı: 19.04.2023

Numarası:

2022-2023 BAHAR DÖNEMİ SOYUT MATEMATİK II

1. QUİZ SORULARI

1) $a, b, c \in N$ olmak üzere

$$b > a \text{ ise } b(a+c) < cb + b^2$$

olup olmadığını araştırınız.

2) $x, y \in Z$ olmak üzere

$$(7|x+y),\ (7|x-y) \text{ ve } (7|x^2) \text{ ise } (49|x^3+y^3)$$

olup olmadığını araştırınız.

BAŞARILAR

Dr. Çağla ÇELEMOĞLU

Çözüm 1) Burada iki yolla çözüm yapılabilir

1. yol : $b > a \Rightarrow b = a+k$ o.ş $\exists k \in N^*$ vardır.

Eğer $cb+b^2 = b(a+c)+r$ o.ş $\exists r \in N^*$ bulunursa bu eşitsizlik gerçekleşmiş olur.

$$cb+b^2 = c(a+k)+(a+k)^2$$

$$= \cancel{ca}+\cancel{ck}+\cancel{a^2}+2ak+k^2$$

$$b(a+c) = (a+k)(a+c)$$

$$= \cancel{a^2}+\cancel{ac}+\cancel{ka}+\cancel{kc}$$

$\Rightarrow r = ak+k^2$

$\Rightarrow r = (a+k)k$

$k \in N^*$, $a \in N \Rightarrow r \in N^*$

old. eşitsizlik gerçeklenir.

2. Yol : Tümevarım yöntemi ile gösterelim.

$$A = \{c \in N \mid \forall a, b \in N \text{ için } b > a \Rightarrow b(a+c) < cb+b^2\} \subseteq N$$

$0 \in A$ olur mu? $b > a \Rightarrow b.b > b.a \Rightarrow b.a < b^2$

olup $0 \in A$ sağlanır.

$\forall c \in A$ için $c^+ \in A$ olur mu?

$c \in A \Rightarrow b > a$ ise $b(a+c) < cb + b^2$ olur.

$c^+ \in A$ olması için $b > a$ ise $b(a+c^+) < c^+ b + b^2$

olmalıdır.

$$c^+ b + b^2 = cb + b + b^2 = cb + b^2 + b > b(a+c) + b$$

$$\Rightarrow c^+ b + b^2 > b(a+c) + b$$

$$\Rightarrow c^+ b + b^2 > b(a+c)^+$$

$$\Rightarrow c^+ b + b^2 > b(a+c^+)$$

$\Rightarrow b(a+c^+) < c^+ b + b^2$ olup $c^+ \in A$.

Çözüm 2) $7 \mid x+y \Rightarrow x+y = 7k_1$ o.ş. $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$

$7 \mid x-y \Rightarrow x-y = 7k_2$ o.ş. $\exists k_2 \in \mathbb{Z}$

$7 \mid x^2 \Rightarrow x^2 = 7k_3$ o.ş. $\exists k_3 \in \mathbb{Z}$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$= 7k_1 . (7k_3 - y(x-y))$$

$$= 7k_1 (7k_3 - 7k_2 y)$$

$$= 7k_1 \, 7(k_3 - k_2 y)$$

$$= 49(\underbrace{k_1(k_3 - k_2 y)}_{k_4 \in \mathbb{Z}})$$

$\Rightarrow 49 \mid x^3 + y^3$ elde edilir.